

信号与系统

第4章 连续时间信号与系统的复频域分析

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger

第4章 连续时间信号与系统的复频域分析

4.1 拉普拉斯变换

4.2 单边拉普拉斯变换的性质

4.3 单边拉普拉斯反变换

4.4 连续时间系统的复频域分析

4.5 系统函数与系统特性

4.6 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

4.1 拉普拉斯变换

双边拉普拉斯变换及其收敛域

单边拉普拉斯变换及其收敛域

常见信号的单边拉普拉斯变换

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

为什么要引入拉普拉斯变换

- 有些信号不满足绝对可积条件，使得其傅里叶变换不好求解；

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- 利用傅里叶变换只能求解系统零状态响应，不能求解零输入响应，从而不能分析系统全响应；
- 有些信号的傅里叶变换比较复杂（如阶跃函数的傅里叶变换）

$$\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

从傅里叶变换到拉普拉斯变换

➤ 引入指数衰减因子 $e^{-\sigma t}$ ，使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \triangleq F(\sigma+j\omega)$$

$$s = \sigma + j\omega \quad F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega)e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma+j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega$$

$$ds = j d\omega \quad f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

双边拉普拉斯变换的定义

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

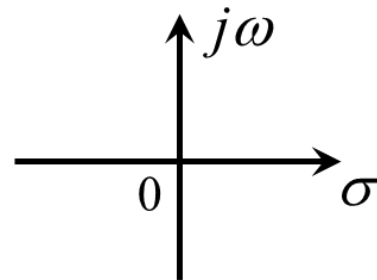
➤ 双边拉普拉斯变换

$$\begin{cases} F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt & \text{双边拉普拉斯正变换} \\ f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds & \text{双边拉普拉斯反变换} \end{cases} \quad f(t) \leftrightarrow F(s)$$

$$\text{基本信号 } e^{st} = \underline{e^{\sigma t}} \cdot \underline{e^{j\omega t}}$$

影响幅度变化 傅里叶分析的基本信号

傅里叶分析只需考虑基本信号的振荡频率 ω ，可用 $j\omega$ 轴上的点对应；拉普拉斯变换还需要考虑一个影响幅度变化的 σ ，用复平面 $s = \sigma + j\omega$ 上的点来表示，相当于增加一个维度。



s 平面 $s = \sigma + j\omega$

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

➤ 收敛域：使拉普拉斯变换积分收敛，即 $F(s)$ 存在的 σ 的取值范围。

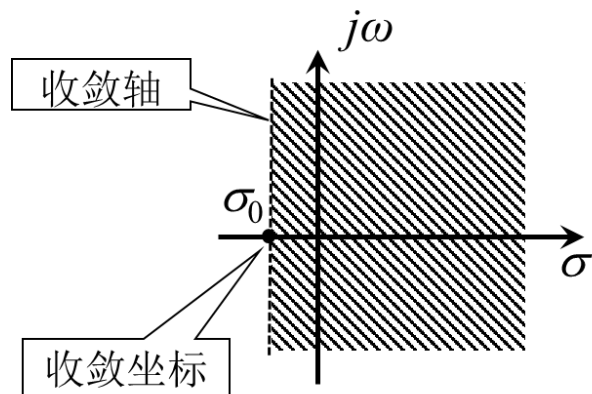
因果信号

$$\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$$

以 $\text{Re}[s] = \sigma_0$ 为收敛轴的右侧复平面

示例 $f(t) = e^{\alpha t} \varepsilon(t), \alpha \in R$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(s-\alpha)t} \right] \\ &= \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} \right] \end{aligned}$$



$$e^{\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha} \quad \text{Re}[s] = \sigma > \alpha$$

$$\text{Re}[s] = \sigma > \alpha \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = 0 \quad F(s) = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma = \alpha \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-j\omega t} \text{ 为未定值, 拉普拉斯变换不定}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma < \alpha \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = \infty \quad \text{此时拉普拉斯变换无界}$$

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

➤ 收敛域：使拉普拉斯变换积分收敛，即 $F(s)$ 存在的 σ 的取值范围。

反因果信号

$$\text{Re}[s] = \sigma < \sigma_0$$

以 $\text{Re}[s] = \sigma_0$ 为收敛轴的左侧复平面

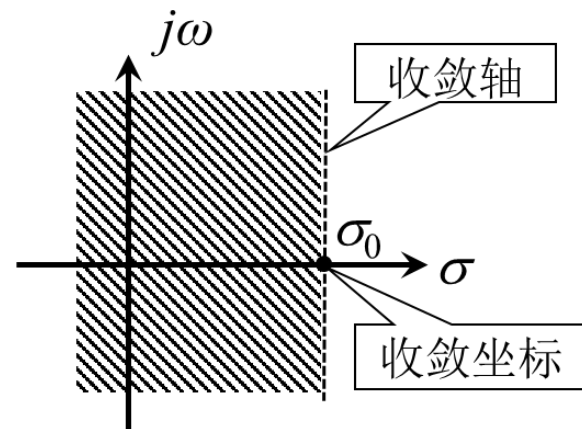
示例 $f(t) = -e^{\alpha t} \varepsilon(-t), \alpha \in R$

$$\begin{aligned} F(s) &= -\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(s-\alpha)t} \right] \\ &= \frac{1}{s-\alpha} \left[1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma < \alpha \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = 0 \quad F(s) = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma = \alpha \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-j\omega t} \text{ 为未定值, 拉普拉斯变换不定}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma > \alpha \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-(\sigma-\alpha)t} e^{-j\omega t} = \infty \quad \text{此时拉普拉斯变换无界}$$



$$-e^{\alpha t} \varepsilon(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s-\alpha} \quad \text{Re}[s] = \sigma < \alpha$$

■ 双边拉普拉斯变换及其收敛域

➤ 收敛域：使拉普拉斯变换积分收敛，即 $F(s)$ 存在的 σ 的取值范围。

$$e^{\alpha t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - \alpha} \quad \text{Re}[s] = \sigma > \alpha$$

$$-e^{\alpha t} \varepsilon(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s - \alpha} \quad \text{Re}[s] = \sigma < \alpha$$

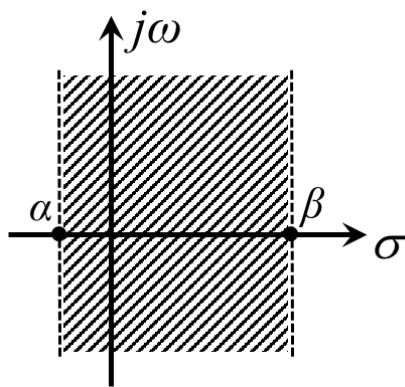
不同信号可能会有相同的象函数，但收敛域不同。

双边信号

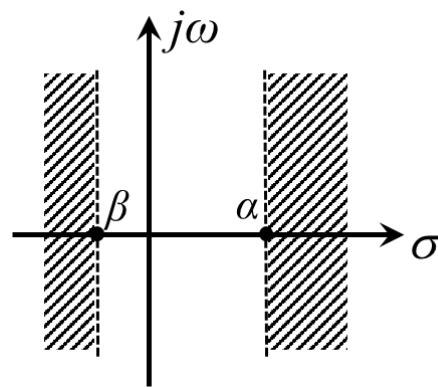
$$f(t) = \underbrace{e^{\alpha t} \varepsilon(t)}_{\text{red}} + \underbrace{e^{\beta t} \varepsilon(-t)}_{\text{blue}} \quad F(s) = \frac{1}{\underbrace{s - \alpha}_{\text{red}}} - \frac{1}{\underbrace{s - \beta}_{\text{blue}}}$$

$$\text{Re}[s] = \sigma > \alpha$$

$$\text{Re}[s] = \sigma < \beta$$



$\alpha < \beta$ $F(s)$ 存在

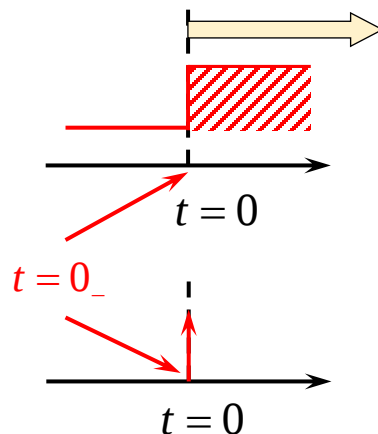


$\alpha \geq \beta$ $F(s)$ 不存在

■ 单边拉普拉斯变换及其收敛域

➤ 单边拉普拉斯变换

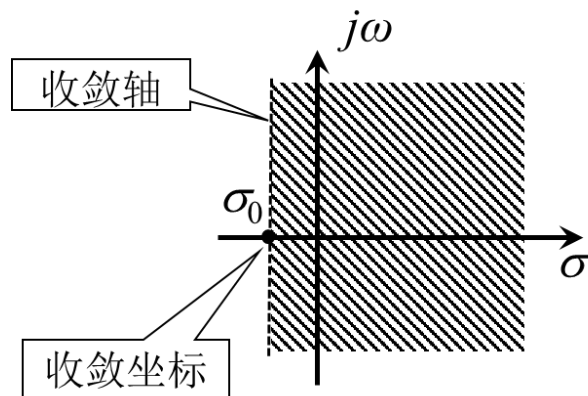
$$\begin{cases} F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt & \text{单边拉普拉斯正变换} \\ f(t) = \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \right] \varepsilon(t) & \text{单边拉普拉斯反变换} \end{cases}$$



取下限 $t=0_-$ 是为了包含到 $t=0$ 时刻，此时可能含有冲激和跳变等。

➤ **收敛域：** 信号 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换等效于因果信号 $f(t)\varepsilon(t)$ 的双边拉普拉斯变换，因此单边拉普拉斯变换的收敛域为：

$\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$ 收敛轴 $\text{Re}[s] = \sigma_0$ 的右侧复平面



➤ 实际主要研究因果信号，因此主要分析单边拉普拉斯变换，不再特别强调收敛域。

■ 常见信号的单边拉普拉斯变换

$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad \operatorname{Re}[s] > -\infty \quad \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n \quad \operatorname{Re}[s] > -\infty$		
$e^{s_0 t} \varepsilon(t)$ $e^{s_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{s - s_0} \quad \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[s_0]$	$e^{\pm \alpha t} \varepsilon(t)$ $e^{\pm \alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{s \mp \alpha} \quad \operatorname{Re}[s] > \pm \alpha$	$e^{\pm j\omega_0 t} \varepsilon(t)$ $e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{s \mp j\omega_0} \quad \operatorname{Re}[s] > 0$
$\cos \omega_0 t \varepsilon(t)$ $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] \leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}[s] > 0$		
$\sin \omega_0 t \varepsilon(t)$ $\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} [e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}] \leftrightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0} \right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}[s] > 0$		
$\varepsilon(t) \text{ 或 } 1 \leftrightarrow F(s) = \int_{0_-}^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}[s] > 0$		
$g_\tau(t - \frac{\tau}{2}) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau) \leftrightarrow F(s) = \int_{0_-}^{\tau} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big _0^{\tau} = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad \operatorname{Re}[s] > -\infty$		

4.2 单边拉普拉斯变换的性质

线性性质

时域微分性质

时移性质

时域积分性质

复频移性质

复频域微分性质

尺度变换性质

复频域积分性质

时域卷积性质

初值定理

复频域卷积性质

终值定理

■ 线性性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_2$$

$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(s) + bF_2(s) \quad \operatorname{Re}[s] > \max(\sigma_1, \sigma_2)$$

例题1 求信号 $f(t) = (1 - e^{-t})\varepsilon(t)$ 的象函数 $F(s)$ 。

收敛域也可能存在一些特殊情况：若两个信号作减法以后变成时域有限信号，此时信号本身就绝对可积，当 σ 取任意值时，拉普拉斯变换都存在，此时收敛域会扩充为整个 s 平面。

如：阶跃函数的收敛域为 $\operatorname{Re}[s] > 0$

$$\text{但是 } g_\tau(t - \frac{\tau}{2}) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad \operatorname{Re}[s] > -\infty$$

■ 时移性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0 \text{ 则: } f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}, \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

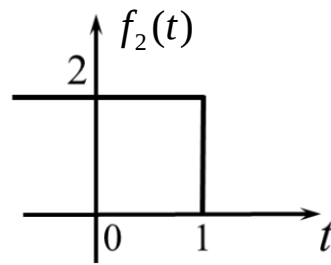
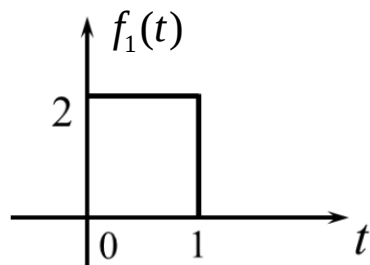
注意： $f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)$ 是指因果信号 $f(t)\varepsilon(t)$ 延时 t_0 后的信号，即延时前后信号波形形状不变。为保证因果性，只考虑右移，即 $t_0 > 0$ 。

$$\text{若 } f(t) \text{ 是因果信号，则: } f(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}, \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

例题2 求下列信号的单边拉普拉斯变换 $F(s)$ 。

$$1) f(t) = e^{-2(t-3)}\varepsilon(t-3) \quad 2) f(t) = e^{-2t}\varepsilon(t-3) \quad 3) f(t) = e^{-2(t-3)}$$

例题3 求图示两个信号的单边拉普拉斯变换 $F(s)$ 。



■ 时移性质

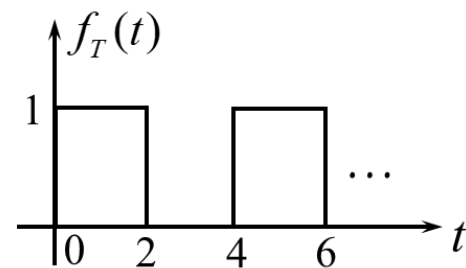
单边周期信号的拉普拉斯变换

$$f_T(t) = f_0(t) + f_0(t-T) + \cdots + f_0(t-nT) + \cdots \quad f_0(t) \leftrightarrow F_0(s), \operatorname{Re}[s] > -\infty$$

$$f_T(t) \leftrightarrow F_0(s)(1 + e^{-sT} + e^{-s2T} + \cdots) = \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}} \quad |e^{-sT}| < 1, \operatorname{Re}[s] > 0$$

已知第一个周期内的脉冲 $f_0(t)$ 及周期 T ，即可求得单边周期信号的拉普拉斯变换。

例题4 求图示单边周期矩形脉冲信号的象函数 $F(s)$ 。



■ 复频移性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_1$$

$$\text{则: } f(t)e^{s_0 t} \leftrightarrow F(s - s_0), \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 + \sigma_0, \sigma_0 = \operatorname{Re}[s_0]$$

例题5 求信号 $f(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \varepsilon(t)$ 、 $f(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t \varepsilon(t)$ 的象函数 $F(s)$ 。

$$e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}[s] > -\alpha$$

$$e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \quad \operatorname{Re}[s] > -\alpha$$

■ 尺度变换性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0 \quad \text{则:} \quad f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \operatorname{Re}[s] > a\sigma_0, a > 0$$

(要求 $a > 0$ 是为了保证信号的因果性)

时移、复频移、尺度变换经常放在一起考察。

$$\text{例: } f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0 \quad f(at-b)\varepsilon(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{s}{a}b}, \operatorname{Re}[s] > a\sigma_0$$

例题6

已知因果信号 $f(t)$ 的象函数 $F(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$ ，求 $e^{-t} f(3t-2)$ 的象函数。

■ 时域卷积性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_2$$

则： $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$ 收敛域是二者收敛域的公共部分

$$\text{LTI系统: } y_{zs}(t) = e(t) * h(t) \leftrightarrow Y_{zs}(s) = E(s) \cdot H(s)$$

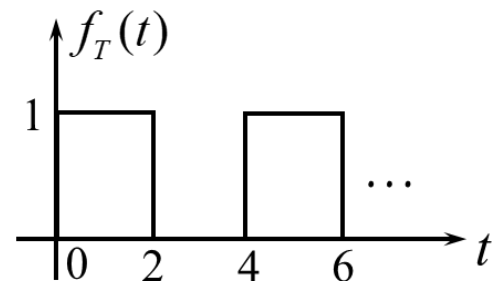
■ 复频域卷积性质

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_2$$

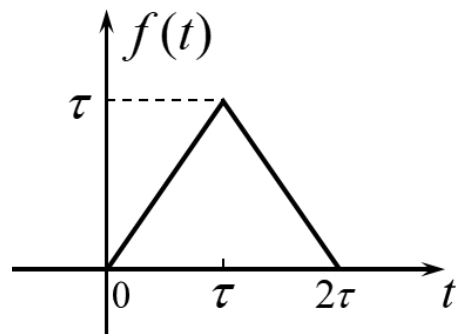
$$\text{则: } f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\eta) F_2(s-\eta) d\eta \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_1 + \sigma_2$$

少用，不作要求。

例题7 求图示单边周期矩形脉冲信号的象函数 $F(s)$ 。（例3另解）



例题8 求图示三角脉冲信号的拉普拉斯变换 $F(s)$ 。



■ 时域微分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s) \quad \text{Re}[s] > \sigma_0 \quad \left. \begin{array}{l} f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0_-) \\ f''(t) \leftrightarrow s^2F(s) - sf(0_-) - f'(0_-) \end{array} \right\} \text{需要记忆}$$

若 $f(t)$ 是因果信号，即 $f(0_-) = f'(0_-) = \cdots = f^{(n)}(0_-) = 0$ ，则 $f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s)$ 。

该性质引入了系统的初始状态，为系统响应的求解带来了方便。

例题9 求 $f_1(t) = \frac{d}{dt}[\cos 2t \varepsilon(t)]$, $f_2(t) = \frac{d}{dt}[\cos 2t]$ 的单边拉普拉斯变换。

■ 时域积分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0 \text{ 则: } \begin{cases} \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}, & (\int_{0_-}^t)^n f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s^n} \\ f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s} \end{cases}$$

$f^{(-1)}(0_-) = \int_{-\infty}^{0_-} f(\tau) d\tau$: 积分在 $t = 0_-$ 时刻的值。

解题应用: 求导 $\rightarrow$ 单边拉普拉斯变换 $\rightarrow$ 时域积分性质

若 $f_1(t) = f'(t) \leftrightarrow F_1(s)$, 则有:

$$\int_{0_-}^t f_1(x) dx = \int_{0_-}^t \frac{df(x)}{dx} dx = \underline{f(t)} - \underline{f(0_-)}$$

$\Downarrow \quad \Downarrow$ 单边LT

$$\underline{F(s)} - \underline{\frac{f(0_-)}{s}} = \frac{F_1(s)}{s}$$

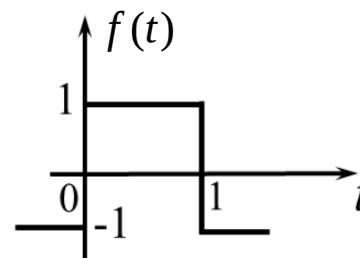
$$f(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{F_1(s)}{s} + \frac{f(0_-)}{s}$$

若因果信号满足 $f^{(n)}(t) \leftrightarrow F_n(s)$, 则 $f(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{F_n(s)}{s^n}$

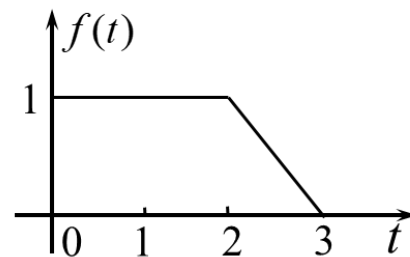
例题10 求解信号 $f(t) = t^n \varepsilon(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 。

$$t^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \operatorname{Re}[s] > 0$$

例题11 求解图示信号的单边拉普拉斯变换 $F(s)$ 。



例题12 已知信号 $f(t)$ 的波形如图所示，求其拉普拉斯变换 $F(s)$ 。



■ 复频域微分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

$$\text{则: } \left. \begin{aligned} (-t)f(t) &\leftrightarrow \frac{d}{ds} F(s) \\ (-t)^n f(t) &\leftrightarrow \frac{d^n}{ds^n} F(s) \end{aligned} \right\} \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \left[\int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right] \\ &= \int_{0_-}^{+\infty} (-t) f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} F(s) &= \frac{d^n}{ds^n} \left[\int_{0_-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right] \\ &= \int_{0_-}^{+\infty} (-t)^n f(t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

例题13 求函数 $f(t) = t^2 e^{-2t} \varepsilon(t)$ 的拉普拉斯变换。

■ 复频域积分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0, \text{ 则 } \frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty F(\lambda) d\lambda, \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

例题14 求函数 $f(t) = \frac{\sin t}{t} \varepsilon(t)$ 的拉普拉斯变换。

例题15 求函数 $f(t) = \frac{1 - e^{-2t}}{t}$ 的单边拉普拉斯变换。

■ **初值定理** 由 $F(s)$ 直接求 $f(0_+), f'(0_+), f''(0_+), \dots$

设信号不含冲激信号及其各阶导数（ $F(s)$ 是真分式），若 $f(t) \leftrightarrow F(s)$ ：

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$f'(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[sF(s) - f(0_+)]$$

$$f''(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s[s^2F(s) - sf(0_+) - f'(0_+)]$$

■ **终值定理** 由 $F(s)$ 判断 $f(\infty)$ 是否存在，并求之。

$$f(t) \leftrightarrow F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0, \sigma_0 < 0 \quad (\text{收敛域包含虚轴})$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

前提： 单边拉氏变换 $F(s)$ 在 s 的右半平面或 $j\omega$ 轴上不存在极点（原点 $s = 0$ 的一阶极点除外，该极点可约去），此时 $f(\infty)$ 有界。

例题16

给定下列象函数，求对应信号 $f(t)$ 的初值 $f(0_+)$ 和终值 $f(\infty)$ 。

$$1) F(s) = \frac{1}{s+1} \quad 2) F(s) = \frac{2s}{s^2+4} \quad 3) F(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+3)^2}$$

■ 关于初值定理的补充说明

若 $F(s)$ 是假分式，在求 $f(0_+)$ 时需要先将 $F(s)$ 分解成多项式与真分式 $F_1(s)$ 之和，此时初值根据真分式 $F_1(s)$ 计算，终值计算方法不变。

因为多项式对应时域的冲激信号及其导数，处于 $t=0$ 时刻，对初值所在的 $t=0_+$ 时刻没有贡献，故此时可以去掉多项式。

$$F(s) = \underbrace{P(s)}_{\text{多项式}} + \underbrace{F_1(s)}_{\text{真分式}} \longrightarrow f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_1(s)$$

例题16-续 4) $F(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 2}$ 求信号 $f(t)$ 的初值 $f(0_+)$ 和终值 $f(\infty)$ 。

4.3 单边拉普拉斯反变换

部分分式展开法

其他反变换方法

■ 部分分式展开法

有理分式:
$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

当 $m \geq n$ 时, $F(s)$ 为假分式; 当 $m < n$ 时, $F(s)$ 为真分式。

$F(s)$ 为真分式 $m < n$

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{\underbrace{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}_{n \text{ 个极点}}}$$

$F(s)$ 仅有单极点

部分分式形式:

$$F(s) = \frac{k_1}{s-s_1} + \frac{k_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{k_n}{s-s_n}$$

系数公式:

$$k_i = (s-s_i)F(s)\big|_{s=s_i}$$

部分分式对应变换对:

$$k_i e^{s_i t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{k_i}{s-s_i}$$

例题17 求象函数 $F(s) = \frac{s+4}{s^3+3s^2+2s}$ 的原函数 $f(t)$ 。

■ 部分分式展开法

$F(s)$ 含有共轭单极点 共轭单极点 $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$

$$\text{部分分式形式: } F(s) = \underbrace{\left[\frac{k_1}{s - (-\alpha + j\beta)} + \frac{k_2}{s - (-\alpha - j\beta)} \right]}_{F_1(s)} + \underbrace{\cdots + \frac{k_n}{s - s_n}}_{\text{其余极点}}$$

系数公式: $\begin{cases} k_1 = [s - (-\alpha + j\beta)] F(s) \big|_{s=-\alpha+j\beta} \\ k_2 = [s - (-\alpha - j\beta)] F(s) \big|_{s=-\alpha-j\beta} = k_1^* \end{cases}$ 只需求出一个复极点对应的系数, 另一系数取共轭即可

➤ **反变换形式1** 系数 $k_{1,2}$ 为极坐标形式时:

$$k_{1,2} = |k_1| e^{\pm j\varphi} \quad F_1(s) = \frac{|k_1| e^{j\varphi}}{s - (-\alpha + j\beta)} + \frac{|k_1| e^{-j\varphi}}{s - (-\alpha - j\beta)}$$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left[|k_1| e^{j\varphi} e^{(-\alpha + j\beta)t} + |k_1| e^{-j\varphi} e^{(-\alpha - j\beta)t} \right] \varepsilon(t) = |k_1| e^{-\alpha t} \left[e^{j(\beta t + \varphi)} + e^{-j(\beta t + \varphi)} \right] \varepsilon(t) \\ &= 2|k_1| e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \varepsilon(t) \end{aligned}$$

■ 部分分式展开法

$F(s)$ 含有共轭单极点 共轭单极点 $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$

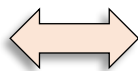
➤ **反变换形式2** 系数 $k_{1,2}$ 为直角坐标形式时:

$$k_{1,2} = A \pm jB \quad F_1(s) = \frac{A + jB}{s - (-\alpha + j\beta)} + \frac{A - jB}{s - (-\alpha - j\beta)}$$

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left[(A + jB)e^{(-\alpha + j\beta)t} + (A - jB)e^{(-\alpha - j\beta)t} \right] \varepsilon(t) \\ &= e^{-\alpha t} \left[A(e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}) + jB(e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}) \right] \varepsilon(t) \\ &= 2e^{-\alpha t} [A \cos(\beta t) - B \sin(\beta t)] \varepsilon(t) \end{aligned}$$

$$|k_1| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$f_1(t) = 2|k_1|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi) \varepsilon(t)$$



$$f_1(t) = 2e^{-\alpha t} [A \cos(\beta t) - B \sin(\beta t)] \varepsilon(t)$$

$$k_{1,2} = |k_1|e^{\pm j\varphi}$$

$$\varphi = \arctan \frac{B}{A}$$

$$k_{1,2} = A \pm jB$$

例题18 求象函数 $F(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2+4s+5)}$ 的原函数 $f(t)$ 。

■ 部分分式展开法

$F(s)$ 含有 r 重极点

$$F(s) = \frac{B(s)}{\underbrace{(s-s_1)^r}_{r \text{ 重极点 } s=s_1} A_2(s)} = \frac{B(s)}{(s-s_1)^r (s-s_{r+1}) \cdots (s-s_n)}$$

r 重极点 $s = s_1$

部分分式形式:

$$F(s) = \left[\frac{k_{11}}{(s-s_1)^r} + \frac{k_{12}}{(s-s_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{k_{1r}}{(s-s_1)} \right] + \sum_{j=r+1}^n \frac{k_j}{s-s_j}$$

系数公式:

$$k_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} (s-s_1)^r F(s) \Big|_{s=s_1}$$

部分分式对应变换对:

$$t^n \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \quad t^{n-1} e^{s_1 t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(s-s_1)^n} \quad \frac{k_{1i}}{(n-1)!} t^{n-1} e^{s_1 t} \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{k_{1i}}{(s-s_1)^n}$$

例题19 求象函数 $F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}$ 的原函数 $f(t)$ 。

■ 部分分式展开法

$F(s)$ 为假分式 $m \geq n$ $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$

$$F(s) = \underbrace{c_{m-n} s^{m-n} + \cdots + c_1 s + c_0}_{\text{多项式}} + \underbrace{\frac{D(s)}{A(s)}}_{\text{真分式}} = P(s) + \frac{D(s)}{A(s)}$$

多项式部分：

$$P(s) = c_{m-n} s^{m-n} + \cdots + c_1 s + c_0 \quad \longleftrightarrow \quad c_{m-n} \delta^{(m-n)}(t) + \cdots + c_1 \delta'(t) + c_0 \delta(t)$$

真分式部分：可以重复前文的操作进行部分分式展开

例题20 求象函数 $F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{s^2 + 3s + 2}$ 的原函数 $f(t)$ 。

■ 其他反变换方法

$F(s)$ 含共轭单极点时的配凑法

所用变换对：

$$\cos \beta t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \beta^2}, \quad \sin \beta t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

$$e^{-\alpha t} \cos \beta t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad e^{-\alpha t} \sin \beta t \varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}$$

当含有共轭极点时，可以尝试通过配凑和待定系数，配出对应的象函数，然后求解反变换。

例题21 求象函数 $F(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$ 的原函数 $f(t)$ 。

例题22 求象函数 $F(s) = \frac{s+6}{s^3 + 2s^2 + 4s + 8}$ 的原函数 $f(t)$ 。

■ 其他反变换方法

$F(s)$ 不是有理分式

当 $F(s)$ 不是有理分式时，无法进行部分分式展开，需要运用常见信号的拉普拉斯变换对，结合拉普拉斯变换的性质进行反变换求解。

回顾：单边周期信号的拉普拉斯变换

$$f_T(t) \leftrightarrow \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}}$$

例题23 求象函数 $F(s) = \frac{1}{s(1+e^{-2s})}$ 的原函数 $f(t)$ 。

例题24 求象函数 $F(s) = \frac{\pi(1+e^{-s})}{(s^2 + \pi^2)(1-e^{-4s})}$ 的原函数 $f(t)$ 。

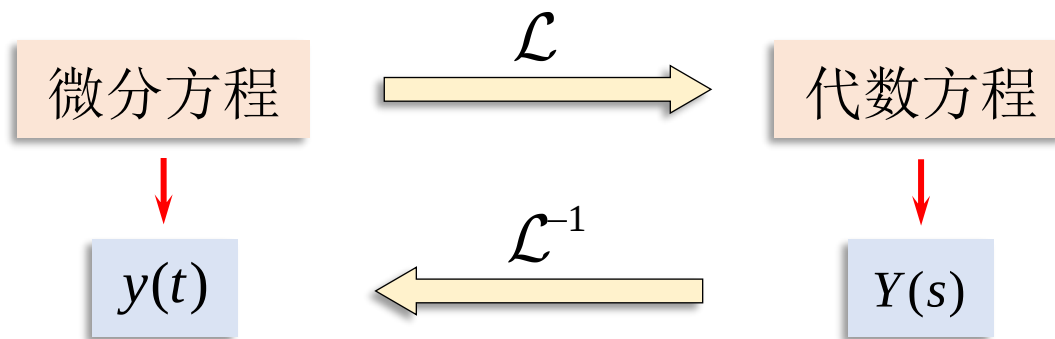
4.4 连续时间系统的复频域分析

系统微分方程的复频域解

系统函数与系统的 s 域框图

电路的复频域 (s 域) 分析

■ 系统微分方程的复频域解



以二阶LTI连续系统为例，系统的微分方程为：

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

激励 $e(t)$ 在 $t = 0$ 时刻加入系统，此时 $e(0_-) = e'(0_-) = e''(0_-) = 0$ 。

对方程两端同时取单边拉普拉斯变换，根据时域微分性质，有：

$$\left[s^2 Y(s) - s y(0_-) - y'(0_-) \right] + a_1 \left[s Y(s) - y(0_-) \right] + a_0 Y(s) = b_2 s^2 E(s) + b_1 s E(s) + b_0 E(s)$$

其中 $y(0_-), y'(0_-)$ 为系统的初始状态。

■ 系统微分方程的复频域解

$$\left[s^2 Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) \right] + a_1 \left[sY(s) - y(0_-) \right] + a_0 Y(s) = b_2 s^2 E(s) + b_1 s E(s) + b_0 E(s)$$

$$(s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) - \left[(s + a_1)y(0_-) + y'(0_-) \right] = (b_2 s^2 + b_1 s + b_0)E(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s + a_1)y(0_-) + y'(0_-)}{s^2 + a_1 s + a_0}}_{Y_{zi}(s)} + \underbrace{\frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} E(s)}_{Y_{zs}(s)}$$

与微分方程系数和
系统初始状态有关
与系统激励无关

与微分方程系数和
系统的激励有关
与初始状态无关

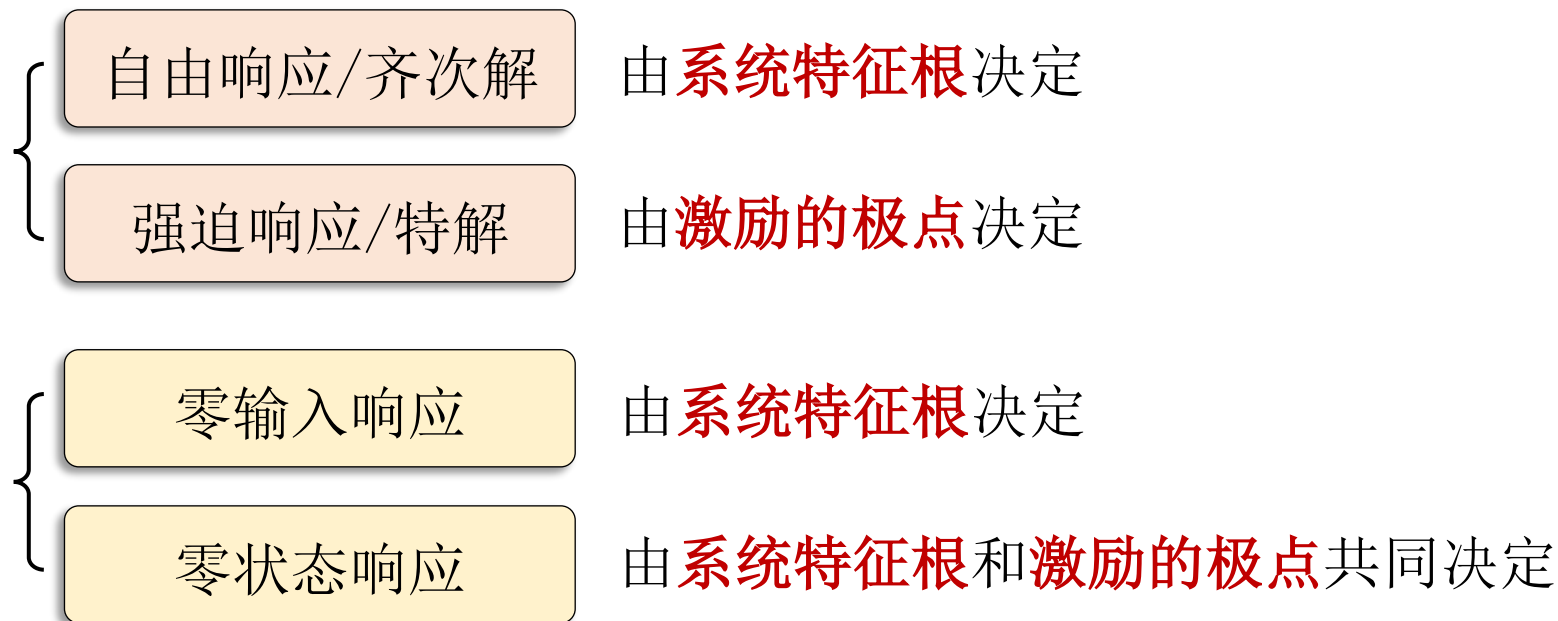
$$Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s) \quad \longleftrightarrow \quad y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

■ 系统微分方程的复频域解

$$Y_{zi}(s) = \frac{(s + a_1)y(0_-) + y'(0_-)}{s^2 + a_1s + a_0} \quad Y_{zs}(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} E(s)$$

系统时域解的形式由全响应 $Y(s)$ 的极点决定。而 $Y(s)$ 的极点由系统特征方程形成的极点，和系统激励信号的极点组成。

系统特征方程： $s^2 + a_1s + a_0 = 0$ 特征根 = 特征方程形成的极点



例题25

已知系统的微分方程为 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 2e'(t) + 6e(t)$ ，激励信号为 $e(t) = \varepsilon(t)$ ，系统的初始状态 $y(0_-) = 2, y'(0_-) = 1$ ，求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 、零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和全响应 $y(t)$ 。

■ 系统函数与系统的 s 域框图

系统函数

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{E(s)}$$

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$

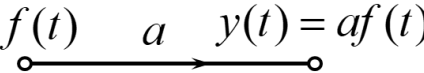
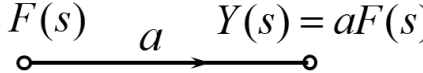
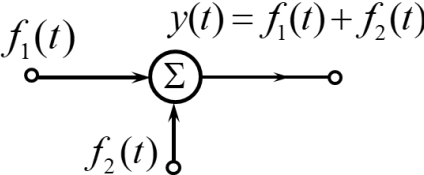
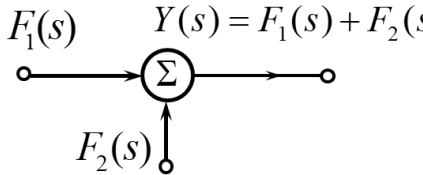
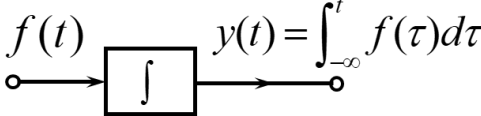
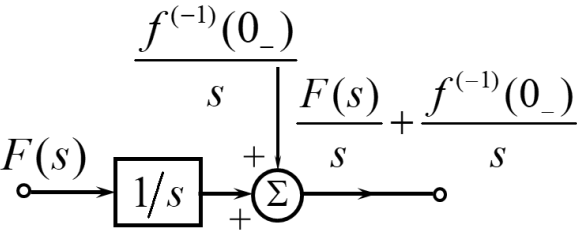
$$Y_{zs}(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} E(s) \quad \longrightarrow \quad H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

系统函数只与微分方程的系数和阶数有关。因此它只与系统的结构、参数有关，而与系统的激励、初始状态等均无关，反映的是系统固有特性。

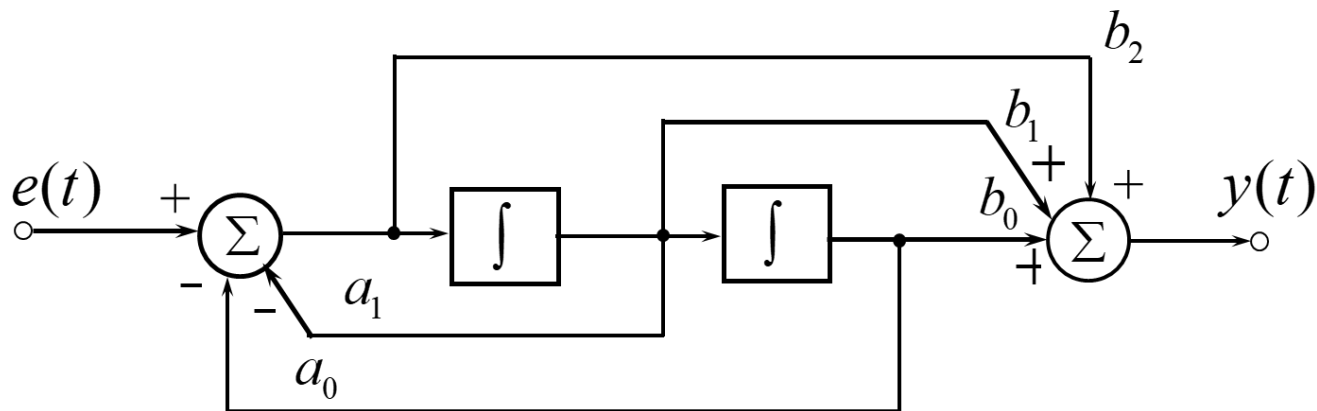
$$Y_{zs}(s) = E(s) \cdot H(s) \leftrightarrow y_{zs}(t) = e(t) * h(t) \quad h(t) \leftrightarrow H(s)$$

■ 系统函数与系统的 s 域框图

系统的 s 域框图

	时域框图	s域框图
1) 数乘器	$f(t) \xrightarrow{a} y(t) = af(t)$ 	$F(s) \xrightarrow{a} Y(s) = aF(s)$ 
2) 加法器	$f_1(t) \xrightarrow{\quad} \Sigma \xrightarrow{\quad} y(t) = f_1(t) + f_2(t)$ $f_2(t) \xrightarrow{\quad} \Sigma$ 	$F_1(s) \xrightarrow{\quad} \Sigma \xrightarrow{\quad} Y(s) = F_1(s) + F_2(s)$ $F_2(s) \xrightarrow{\quad} \Sigma$ 
3) 积分器	$f(t) \xrightarrow{\quad} \int \xrightarrow{\quad} y(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 	$\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$ $\downarrow$ $\frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$  $F(s) \xrightarrow{\quad} \frac{1}{s} \xrightarrow{\quad} \frac{F(s)}{s}$ 系统函数与初始状态无关 因此常用零状态的s域模型

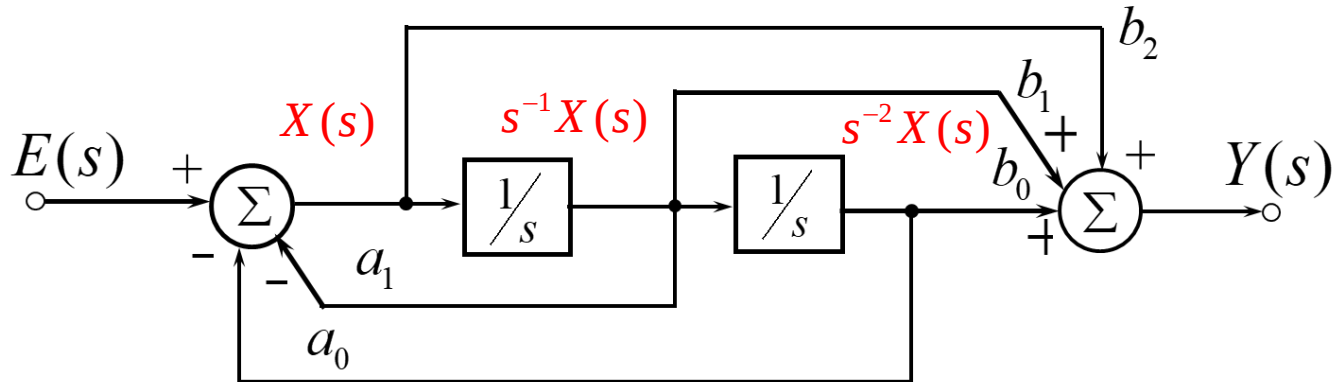
■ 系统函数与系统的 s 域框图



时域框图

$$H(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}}$$

⇓



s 域框图

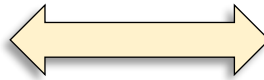
$$E(s) - a_1 s^{-1} X(s) - a_0 s^{-2} X(s) = X(s) \quad b_2 X(s) + b_1 s^{-1} X(s) + b_0 s^{-2} X(s) = Y(s)$$

$$E(s) = (1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}) \cdot X(s)$$

$$Y(s) = (b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}) \cdot X(s)$$

■ 系统函数，微分方程与系统 s 域框图的转换

微分方程



系统函数

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 e''(t) + b_1 e'(t) + b_0 e(t)$$



$$s^2$$

$$a_1 s$$

$$a_0$$

$$b_2 s^2$$

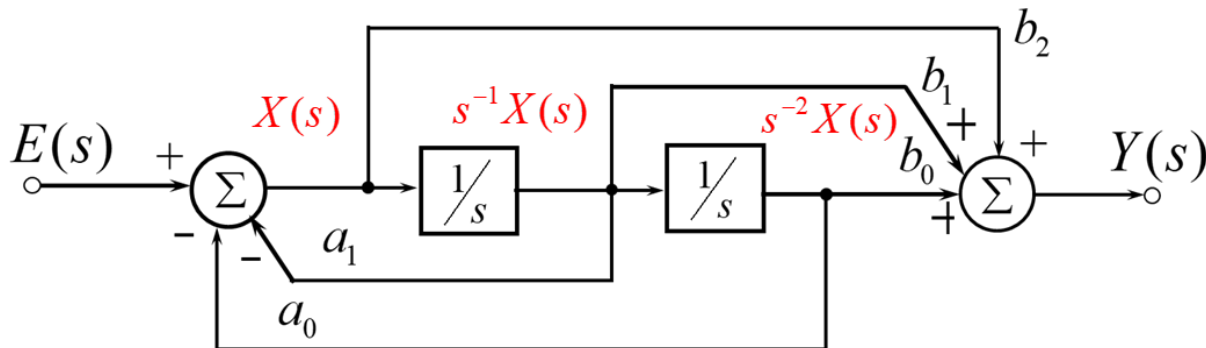
$$b_1 s$$

$$b_0$$

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$= \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}}$$

系统框图



积分 $\Leftrightarrow 1/s$

求导 $\Leftrightarrow s$

例题26

- 1) 已知系统微分方程为 $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e'(t) - 3e(t)$ ，求系统函数 $H(s)$ ；
- 2) 已知连续系统的系统函数 $H(s) = \frac{s+6}{s^2+5s+6}$ ，写出系统的微分方程。

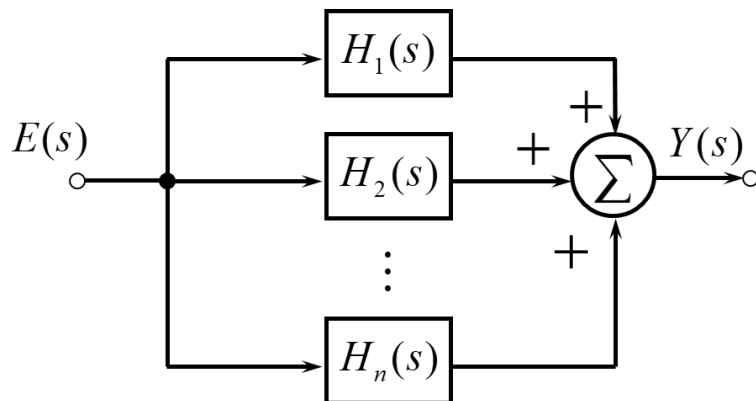
例题27

一个LTI连续系统的系统函数为 $H(s) = H_0 \frac{s+2}{s^2+4s+3}$ ， H_0 为常数，已知此系统阶跃响应的终值为1。

- 1) 写出此系统的微分方程；
- 2) 求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

■ 系统函数与系统的 s 域框图

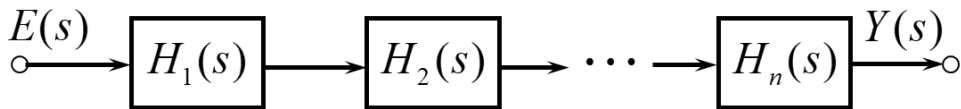
➤ 并联系统：系统函数为子系统函数之和。（时域为相加）



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \cdots + h_n(t)$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_n(s)$$

➤ 级联系统：系统函数为子系统函数之积。（时域为卷积）

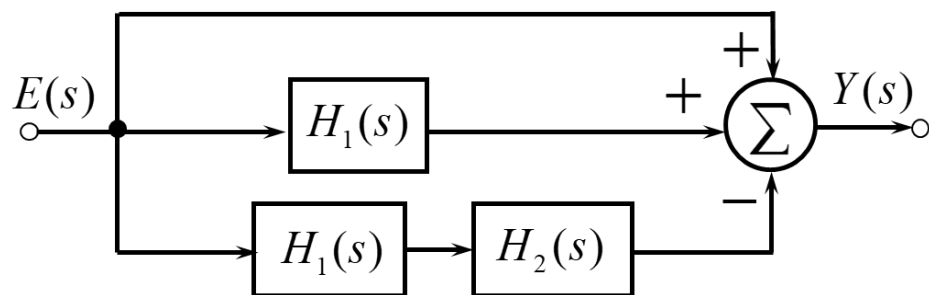


$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \cdots * h_n(t)$$

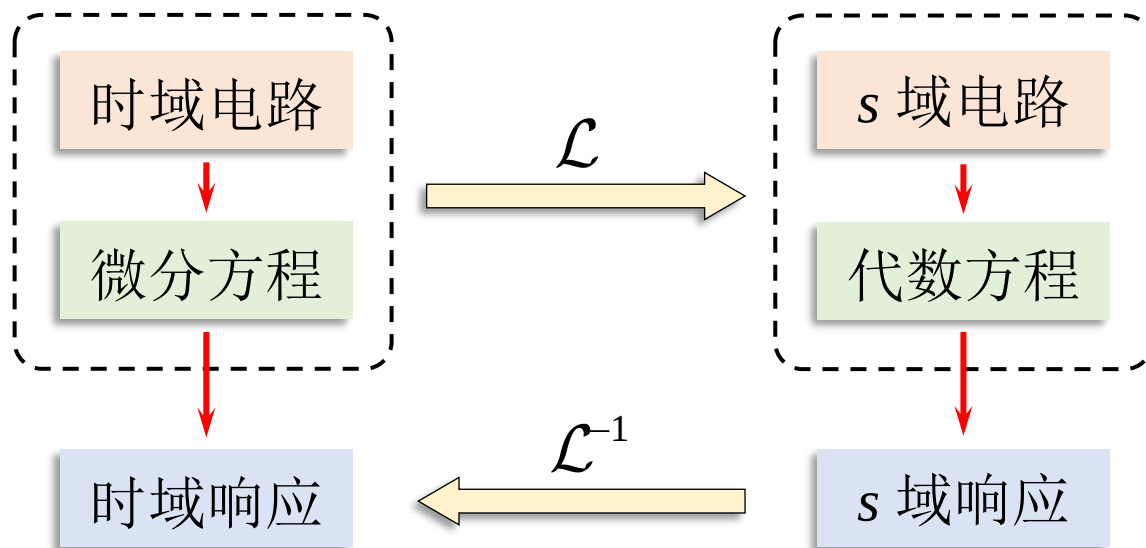
$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \cdots H_n(s)$$

例题28

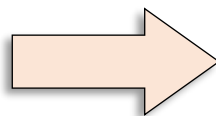
某LTI系统如图，已知 $H_1(s) = \frac{1}{s}$ ，系统的阶跃响应 $g(t) = (t + e^{-t})\varepsilon(t)$ ，试求子系统的系统函数 $H_2(s)$ 与冲激响应 $h_2(t)$ 。



■ 电路的复频域（s 域）分析



- 电路理论
- 电路元器件
- 电路系统模型
- 电路求解方法



思考：

如何用 s 域表示？

■ 电路的复频域（s 域）分析

基尔霍夫定律的 s 域形式

基尔霍夫定律是线性电路分析的理论基础，分为基尔霍夫电流定律（KCL）和基尔霍夫电压定律（KVL）。

$$\begin{cases} \sum i(t) = 0 & \text{集中电路任一节点，流入电流的代数数和为0} \\ \sum u(t) = 0 & \text{集中电路任一回路，各支路电压代数数和为0} \end{cases}$$



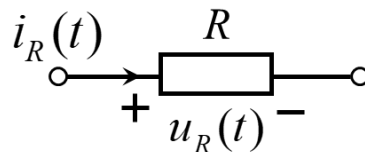
$$\begin{cases} \sum I(s) = 0 & \text{集中电路任一节点，流入电流象函数代数数和为0} \\ \sum U(s) = 0 & \text{集中电路任一回路，各支路电压象函数代数数和为0} \end{cases}$$

■ 电路的复频域（s 域）分析

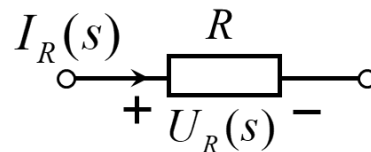
RLC 元件的 s 域模型 假设元件电压和电流选取**关联参考方向**。

电阻元件

$$u_R(t) = Ri_R(t) \iff U_R(s) = RI_R(s)$$



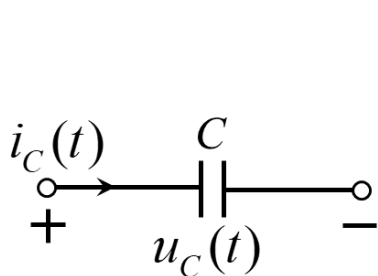
时域模型



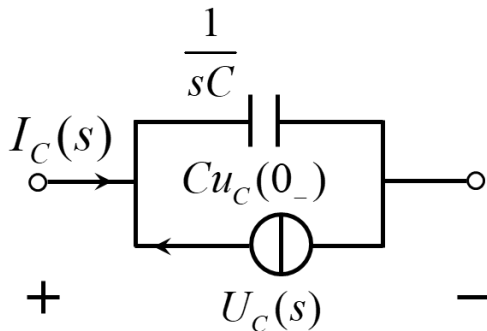
s 域模型

电容元件

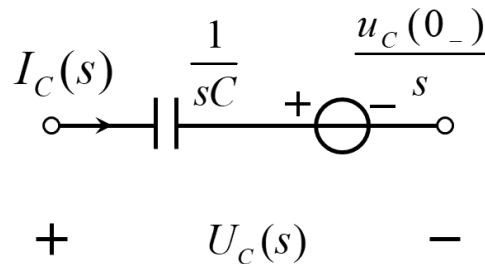
$$i_C(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t) \iff \begin{cases} I_C(s) = sCU_C(s) - Cu_C(0_-) \\ U_C(s) = \frac{u_C(0_-)}{s} + \frac{I_C(s)}{sC} \end{cases}$$



时域模型



并联形式的 s 域模型



串联形式的 s 域模型

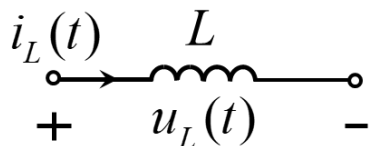
■ 电路的复频域（s 域）分析

RLC 元件的 s 域模型

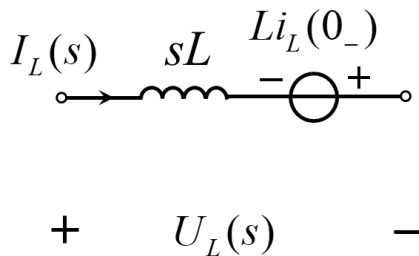
假设元件电压和电流选取**关联参考方向**。

电感元件

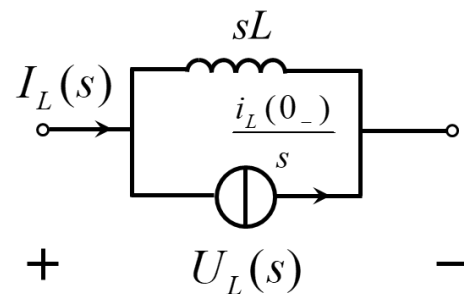
$$u_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) \iff \begin{cases} U_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0_-) \\ I_L(s) = \frac{U_L(s)}{sL} + \frac{i_L(0_-)}{s} \end{cases}$$



时域模型



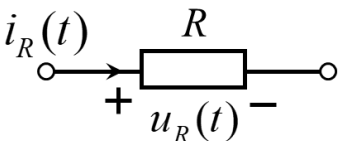
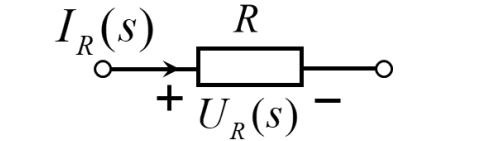
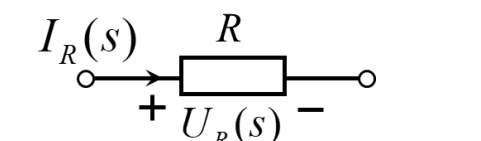
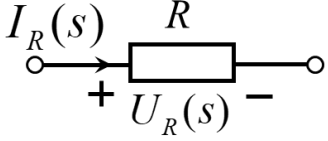
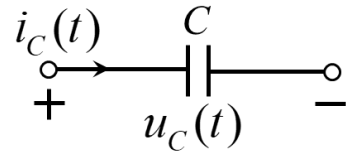
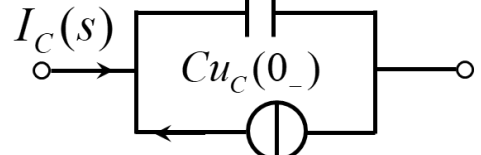
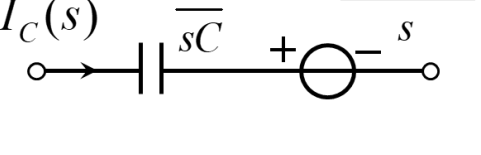
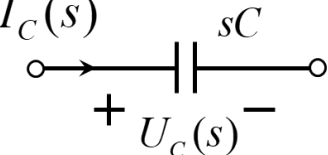
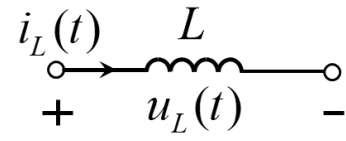
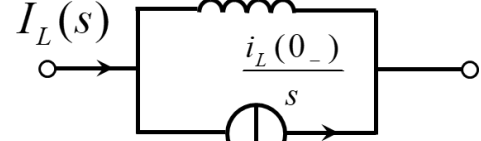
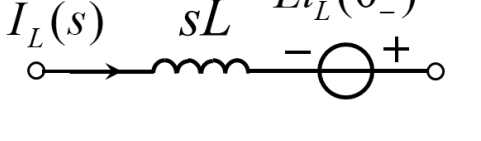
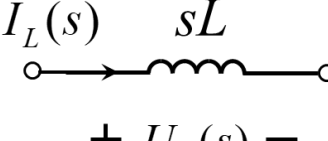
串联形式的 s 域模型



并联形式的 s 域模型

■ 电路的复频域（s 域）分析

RLC 元件的 s 域模型 假设元件电压和电流选取**关联参考方向**。

电路元件	并联形式的s域模型	串联形式的s域模型	零状态的s域模型
			
			
			

■ 电路的复频域（ s 域）分析

电路的复频域（ s 域）分析法举例

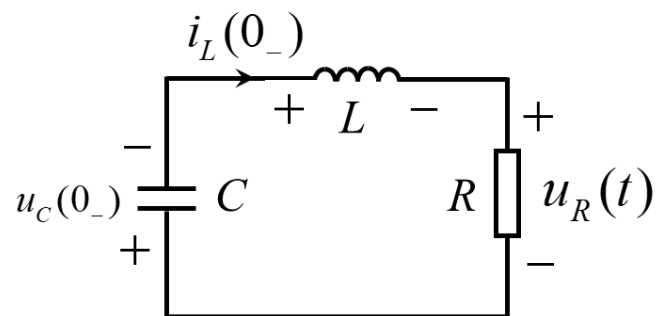
电路分析中学过的若干分析方法均可拿来在电路的复频域分析中使用。如：无源支路的串、并联化简，电压源、电流源的等效变换，网孔电流分析法，节点电压分析法等。

在 s 域的电路模型中，数学表达式由微分方程转为代数方程，求出响应的象函数，再取拉普拉斯反变换求得对应的时域响应。

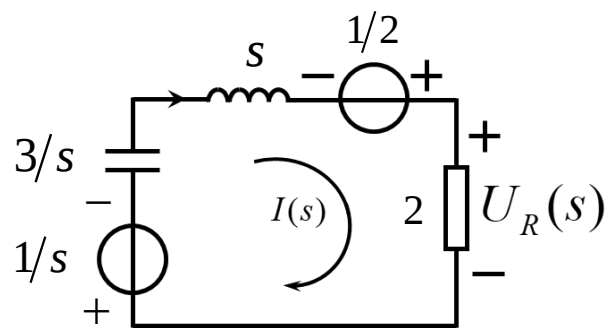
需注意的是：在作电路的 s 域模型时，**所有电源也要对应成象电源，并注意参考方向。**

例题29

下图所示电路，已知元件参数 $L=1\text{H}$, $C=\frac{1}{3}\text{F}$, $R=2\Omega$ ，电容的初始电压 $u_C(0_-)=1\text{V}$ ，电感的初始电流 $i_L(0_-)=0.5\text{A}$ ，试用电路的 s 域模型求零输入响应 $u_R(t)$ 。



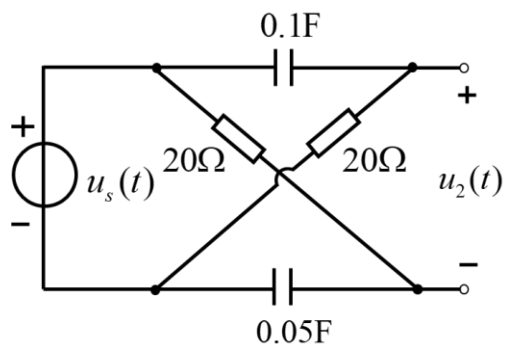
题图



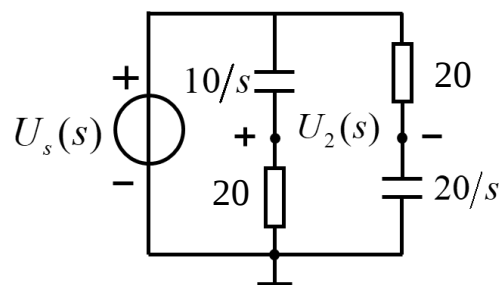
s 域电路

例题30

如图所示的电路中，若以 $u_2(t)$ 作为响应，试用电路的 s 域分析法求解系统的冲激响应。



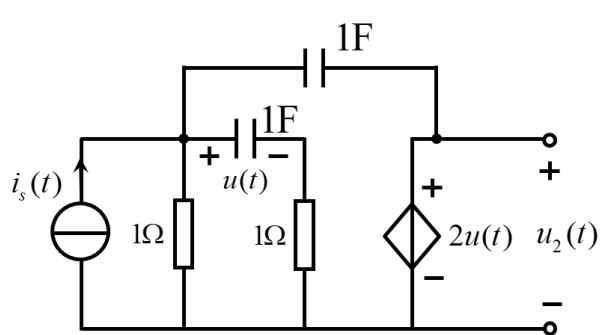
题图



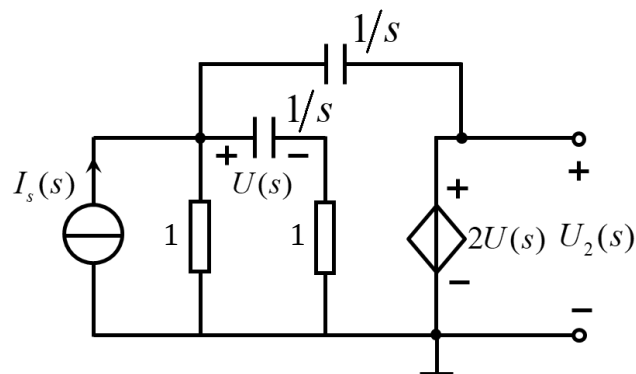
s 域电路（零状态）

例题31

如图所示的电路中，以电流源 $i_s(t)$ 作为激励， $u_2(t)$ 作为响应，试用电路的 s 域分析法求解系统的冲激响应。



题图

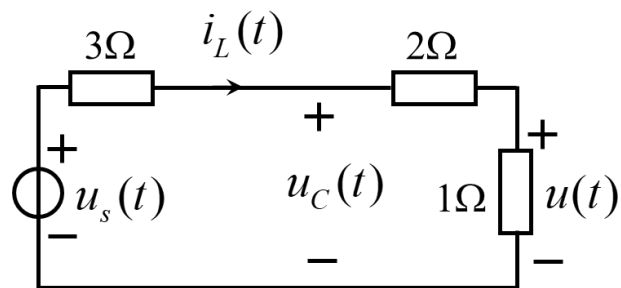


s 域电路（零状态）

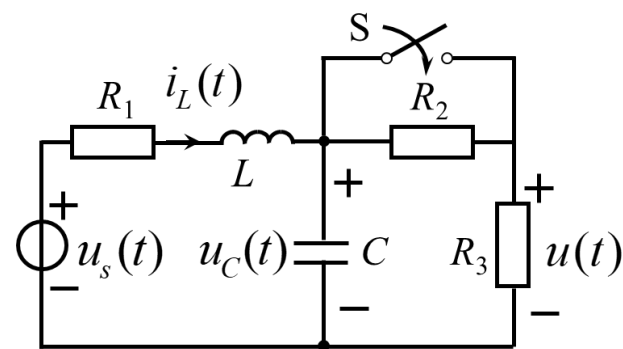
例题32

图示电路，换路（ $t=0$ 时开关 S 闭合，实现换路）之前已达到稳态，已知 $u_s(t)=12\text{V}$ ， $L=1\text{H}$ ， $C=1\text{F}$ ， $R_1=3\Omega$ ， $R_2=2\Omega$ ， $R_3=1\Omega$ ，利用 s 域电路模型求 $u_{zi}(t)$ ， $u_{zs}(t)$ 和全响应 $u(t)$ 。

Step1: 确定初始状态



稳态电路

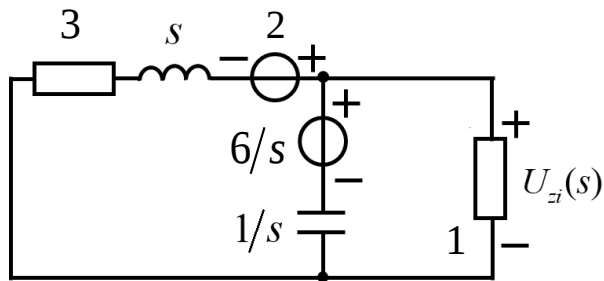


题图

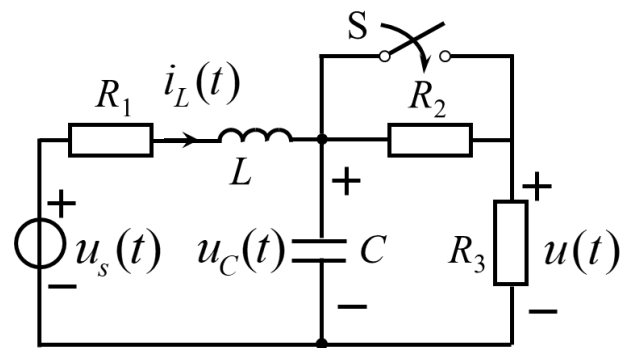
例题32 $u_s(t) = 12\text{V}$ $L = 1\text{H}$, $C = 1\text{F}$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 1\Omega$

换路后, 电阻 R_2 被短路 $i_L(0_-) = 2\text{A}$ $u_C(0_-) = 6\text{V}$

Step2: 求零输入响应 $u_s(t) = 0$



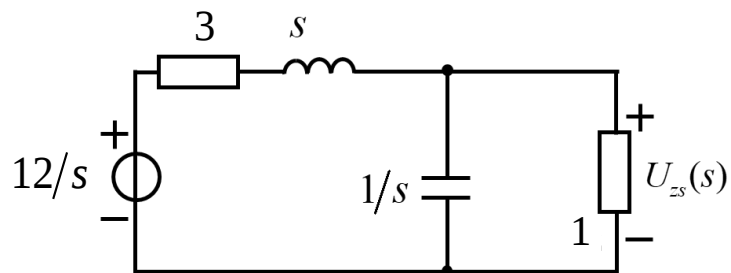
s 域电路 (零输入)



题图

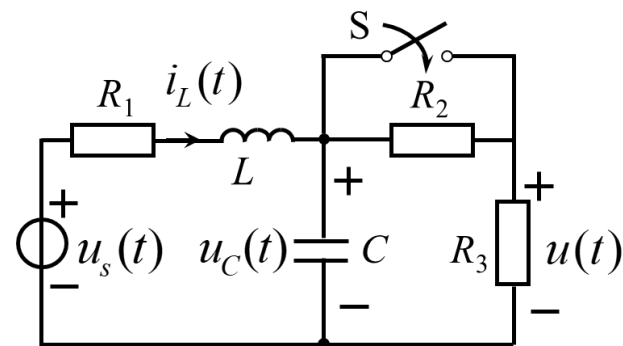
例题32 $u_s(t) = 12\text{V}$ $L = 1\text{H}$, $C = 1\text{F}$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 1\Omega$

Step3: 求零状态响应 $i_L(0_-) = 0$ $u_C(0_-) = 0$



s 域电路（零状态）

$$u_s(t) = 12\varepsilon(t)$$



题图

■ 电路的复频域（s 域）分析

s 域电路分析思路总结

➤ 分析初始状态

在稳态电路中，将**电容视为开路**，**电感视为短路**；

在含有电感、电容的电路中，初始状态指 $i_L(0_-)$, $u_C(0_-)$ 。

➤ s 域零输入响应

激励置零，**留初始状态**（形式为**附加电源**）；

注意附加电源的电压极性或电流方向。

➤ s 域零状态响应

L 和 C 元件的附加电源置零，**保留激励**；

激励需要变换为象函数。

元件计算阻抗

时域		s 域
R	$\Leftrightarrow$	R
L	$\Leftrightarrow$	sL
C	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{sC}$

4.5 系统函数与系统特性

系统函数的零点与极点

系统函数零极点分布与系统时域特性

系统函数与系统的稳定性

系统函数与系统的频域特性

■ 系统函数的零点与极点

系统函数的零点与极点

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{E(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$H(s) = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

系统函数的零点： $s = z_j$

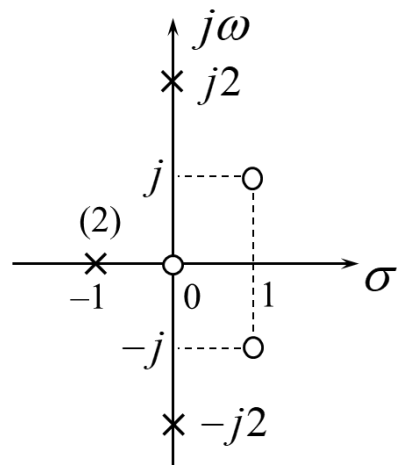
系统函数的极点： $s = p_i$

系统函数的零、极点分布图

把系统函数的零、极点画在 s 平面上的图形，称为系统函数的零、极点分布图。

一般用“○”表示零点，用“×”表示极点，高阶的零、极点需要在对应点处标明阶数。

■ 系统函数的零点与极点



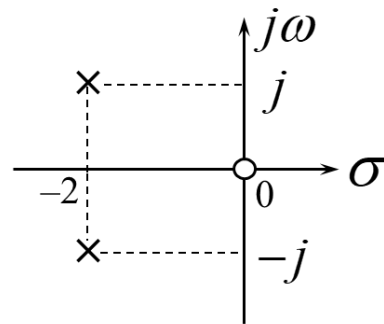
$$H(s) = \frac{s[(s-1)^2 + 1]}{(s+1)^2(s^2 + 4)} = \frac{s[s-(1-j)][s-(1+j)]}{(s+1)^2(s+2j)(s-2j)}$$

三个零点： $z_1 = 0$, $z_2 = 1-j$, $z_3 = 1+j$ （均为一阶零点）

四个极点： $\underline{p_{1,2} = -1}$, $\underline{p_3 = -2j}$, $\underline{p_4 = 2j}$
 二阶极点 一阶极点

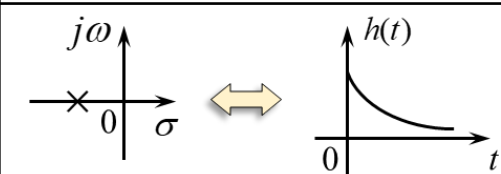
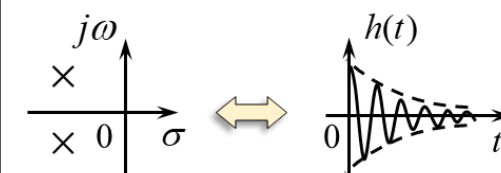
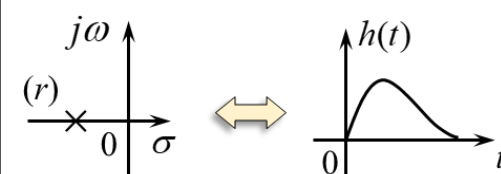
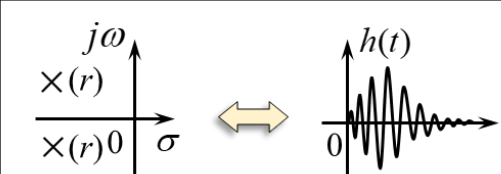
例题33

已知连续系统系统函数 $H(s)$ 的零极点分布如图，且 $h(0_+) = 2$ ，求该系统的系统函数 $H(s)$ 。



■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

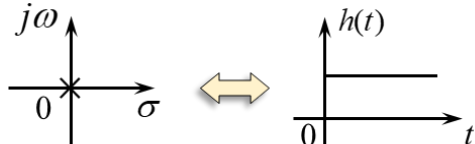
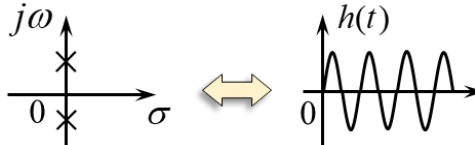
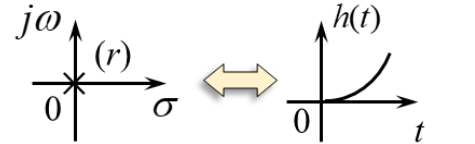
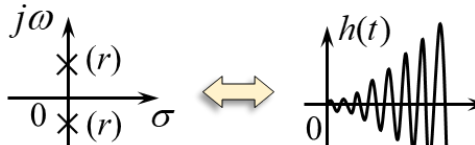
s 平面左开半平面的极点

极点形式	分母多项式因子	时域响应形式	极点分布与波形
一阶实极点 $p_i = -\alpha \ (\alpha > 0)$	$s + \alpha$	$Ke^{-\alpha t} \varepsilon(t)$	
共轭单极点 $p_i = -\alpha \pm j\omega_0$	$(s + \alpha)^2 + \omega_0^2$	$Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \varepsilon(t)$	
r 重极点	$(s + \alpha)^r$	$K_i t^i e^{-\alpha t} \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r-1)$	
	$\left[(s + \alpha)^2 + \omega_0^2 \right]^r$	$K_i t^i e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r-1)$	

$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow 0$ 极点在左开半平面时, 响应最终趋于0, 为暂态响应

■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

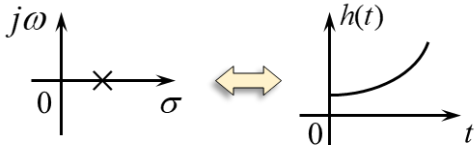
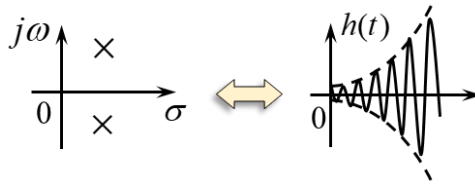
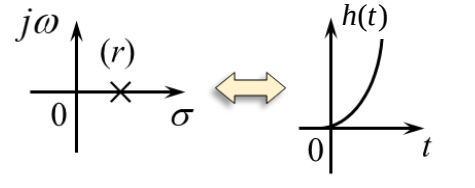
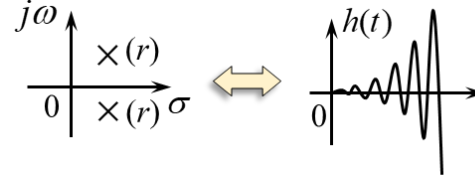
s 平面虚轴上的极点

极点形式	分母多项式因子	时域响应形式	极点分布与波形
一阶实极点 $p_i = 0$	s	$K\varepsilon(t)$	 The diagram shows the s-plane with a pole at the origin (marked with an 'x' and '0' below it). A horizontal axis is labeled σ. A double-headed yellow arrow points to the time domain plot, which shows a step function $h(t)$ starting at $t=0$ and remaining constant.
共轭单极点 $p_i = \pm j\omega_0$	$s^2 + \omega_0^2$	$K \cos(\omega_0 t + \varphi) \varepsilon(t)$	 The diagram shows the s-plane with two poles on the imaginary axis at $\pm j\omega_0$ (marked with 'x' and '0' below it). A horizontal axis is labeled σ. A double-headed yellow arrow points to the time domain plot, which shows a sinusoidal wave $h(t)$ starting at $t=0$.
r 重极点	s^r	$K_i t^i \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r-1)$	 The diagram shows the s-plane with a pole of order r at the origin (marked with 'x' and '0' below it, and '(r)' next to it). A horizontal axis is labeled σ. A double-headed yellow arrow points to the time domain plot, which shows a polynomial curve $h(t)$ starting at $t=0$ and increasing.
	$(s^2 + \omega_0^2)^r$	$K_i t^i \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r-1)$	 The diagram shows the s-plane with two conjugate poles of order r on the imaginary axis at $\pm j\omega_0$ (marked with 'x' and '0' below it, and '(r)' next to each). A horizontal axis is labeled σ. A double-headed yellow arrow points to the time domain plot, which shows a sinusoidal wave $h(t)$ starting at $t=0$ and increasing in amplitude.

虚轴上的一阶极点响应为稳态分量，高阶极点响应为递增函数

■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

s 平面右开半平面的极点

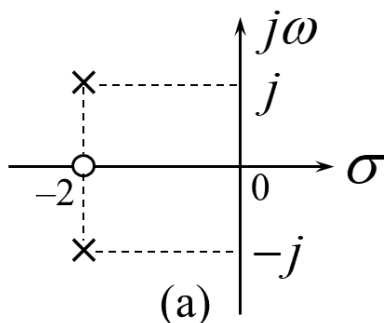
极点形式	分母多项式因子	时域响应形式	极点分布与波形
一阶实极点 $p_i = \alpha \ (\alpha > 0)$	$s - \alpha$	$Ke^{\alpha t} \varepsilon(t)$	
共轭单极点 $p_i = \alpha \pm j\omega_0$	$(s - \alpha)^2 + \omega_0^2$	$Ke^{\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi) \varepsilon(t)$	
r 重极点	$(s - \alpha)^r$	$K_i t^i e^{\alpha t} \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r - 1)$	
	$[(s - \alpha)^2 + \omega_0^2]^r$	$K_i t^i e^{\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \varepsilon(t)$ $(i = 0, 1, \dots, r - 1)$	

$t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow \infty$ 极点在右开半平面时, 响应为递增函数

■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

零点与时域特性的关系

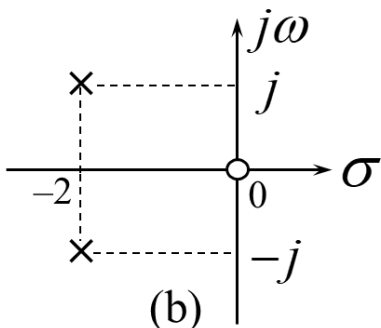
系统函数的零点分布不影响系统的响应形式，只影响响应的幅度和相位。



$$H_a(s) = H_a \frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 1}$$



$$h_a(t) = H_a e^{-2t} \cos t \varepsilon(t)$$



$$H_b(s) = H_b \frac{s}{(s+2)^2 + 1} = H_b \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} - H_b \frac{2}{(s+2)^2 + 1}$$



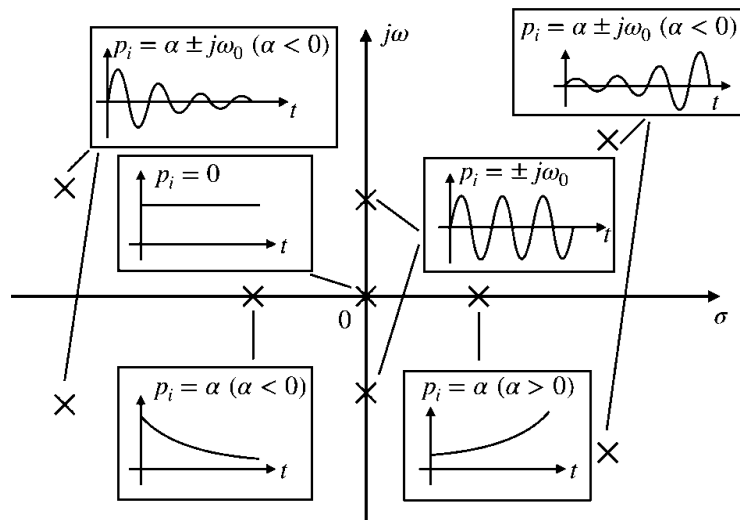
$$h_b(t) = H_b e^{-2t} (\cos t - 2 \sin t) \varepsilon(t) = \sqrt{5} H_b e^{-2t} \cos(t + \arctan 2) \varepsilon(t)$$

■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

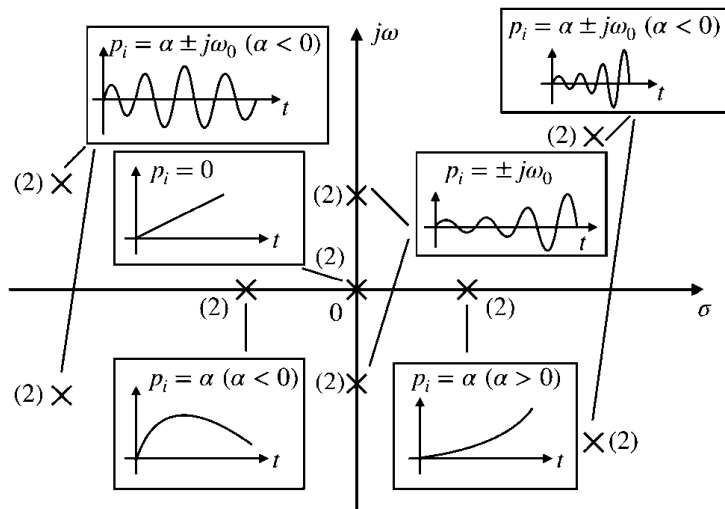
➤ 总结

- **左开半平面极点：** 系统响应当 $t \rightarrow \infty$ 时，**衰减到0**；
- **虚轴上的一阶极点：** 系统响应**幅度稳定**或者**等幅振荡**；
- **虚轴上二阶以上的极点以及右开半平面的极点：** 系统响应随着 $t \rightarrow \infty$ 而**趋于无穷大**；
- **零点：** 不影响系统响应形式，只影响响应的**幅度和相位**。

一阶极点



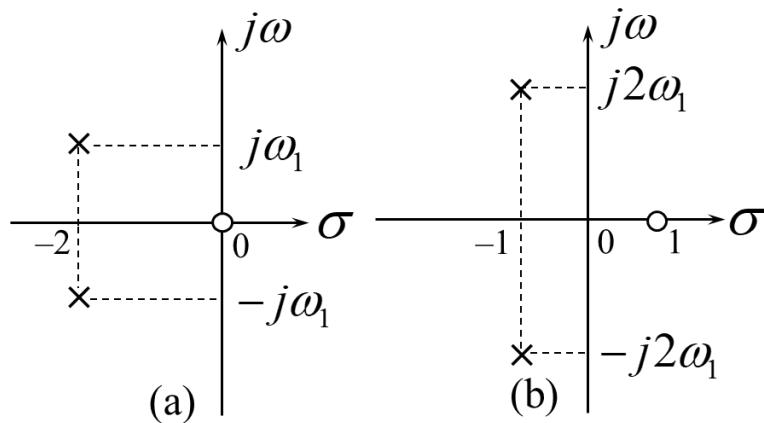
二阶极点



■ 系统函数零极点分布与系统时域特性

➤ 总结

系统函数极点的实部 σ 影响响应的变化趋势；虚部 ω 影响响应的振荡频率快慢。



$$\begin{cases} \sigma \Rightarrow e^{\sigma t} \varepsilon(t) \\ \omega \Rightarrow \cos(\omega t + \varphi) \varepsilon(t) \end{cases}$$

衰减速度： a 系统 $>$ b 系统

振荡频率： a 系统 $<$ b 系统

深刻理解零极点和系统响应的关系，给出一个简单的系统，通过分析零极点分布图，可以直接得出系统响应的大致形式，进而判断系统特性。

■ 系统函数与系统的稳定性

因果系统及判断方法 零状态响应不出现于激励信号之前的系统。

● 时域判断

系统的冲激响应 $h(t)$ 为因果信号，即 $h(t) = 0, t < 0$ 。

● s 域判断

系统函数 $H(s)$ 的收敛域为 $\text{Re}[s] > \sigma_0$ ，即收敛域在最右侧极点所在收敛轴的右侧。

稳定系统及判断方法 对有界输入，零状态响应也有界的系统。

● 时域判断 系统的冲激响应 $h(t)$ 绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \leq M$ 。

● s 域判断 系统函数 $H(s)$ 收敛域必须包含虚轴 $s = j\omega$ 。

■ 系统函数与系统的稳定性

因果稳定系统及判断方法

- 时域判断 系统冲激响应 $h(t)$ 因果且绝对可积, 即 $\int_0^{+\infty} |h(t)| dt \leq M$ 。
- s 域判断

因果稳定系统

$H(s)$ 的极点全部在 s 平面的左开半平面。

例:

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$

因果临界稳定系统

$H(s)$ 在虚轴上仅有一阶极点, 其余极点全部在左开半平面。

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+3)}$$

因果不稳定系统

$H(s)$ 在虚轴上含有二阶及以上极点, 或在右开半平面含有极点。

$$H(s) = \frac{s-3}{s^2(s+1)}$$

$$H(s) = \frac{s}{(s+3)(s-1)}$$

■ 系统函数与系统的稳定性

连续系统的稳定性准则
$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

➤ 充分必要条件：罗斯（Routh）准则

必要条件
$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

若系统稳定，则分母多项式 $A(s)$ 系数均满足 $a_i > 0$ ，无缺项；

注：若 $A(s)$ 系数缺项或有负项，则系统必然不稳定。

充分条件

若罗斯阵列中第一列元素符号相同，此时 $H(s)$ 所有极点都在 s 平面的左开半平面，系统稳定。

若罗斯阵列第一列元素符号不相同，变号的次数为 $A(s) = 0$ 的根在右开半平面的个数，即右开半平面系统极点的个数。

■ 系统函数与系统的稳定性

连续系统的稳定性准则

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

罗斯阵列

共 $n + 1$ 行 之后为全 0 行	1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$	}	由 $A(s)$ 多项式 的系数构成
	2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$		
	3	c_{n-1}	c_{n-3}	c_{n-5}	$\cdots$	}	第3行后系数 需要计算
	4	d_{n-1}	d_{n-3}	d_{n-5}	$\cdots$		
	$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
	$n + 1$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		

第3行后系数的运算规则：

$$c_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad c_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$d_{n-1} = \frac{-1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix} \quad d_{n-3} = \frac{-1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ c_{n-1} & c_{n-5} \end{vmatrix}$$

例题34 已知系统函数分母多项式 $A(s)$ 如下，判别系统的稳定性。

1) $A(s) = s^3 + 4s^2 - 3s + 2$

$A(s)$ 的系数有负项，系统不稳定；

2) $A(s) = 2s^3 + 7s + 9$

$A(s)$ 缺 s^2 项，系统不稳定；

3) $A(s) = 2s^4 + s^3 + 12s^2 + 8s + 2$

$A(s)$ 的系数均为正，满足必要条件，判别稳定性需列写罗斯阵列：

1	2	12	2
2	1	8	0
3	-4	2	0
4	8.5	0	0
5	2	0	0

➤ 阵列第一列元素符号正负改变两次，因此系统函数含两个右开半平面的极点，系统不稳定。

例题34-续 已知系统函数分母多项式 $A(s)$ 如下，判别系统的稳定性。

4) $A(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$

5) $A(s) = s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 6s + 4$

两种特殊情况：

① 第 1 列提前出现 0：用无穷小量 ε 代替；

② 提前出现全 0 行：构造辅助多项式。

1	1	2	3
2	1	2	0
3	0(ε)	3	0
4	$2 - \frac{3}{\varepsilon}$	0	0
5	3	0	0

1	$1s^4$	$4s^2$	$4s^0$
2	$3s^3$	$6s^1$	0
3	$2s^2$	$4s^0$	0
4	0	$4s^1$	0
5	$4s^0$	0	0

$$P(s) = 2s^2 + 4$$

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s$$

$$P(s) = 2s^2 + 4 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{2}j$$

➤ 设 ε 从正向趋于 0，第一列元素符号正负改变两次，系统函数含两个右开半平面的极点。

➤ 第一列元素无正负变化，右开半平面无极点，但提前出现全 0 行，故虚轴上有一阶极点 $\pm\sqrt{2}j$ ，系统临界稳定。

例题35

已知连续系统的系统函数 $H(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k}$ ，为使系统稳定，求常数 k 的取值范围。

■ 系统函数与系统的稳定性

连续系统的稳定性准则

二阶情形 $A(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$

罗斯阵列

共 3 行

之后为全 0 行

1	a_2	a_0
2	a_1	0
3	c_{n-1}	c_{n-3}



1	a_2	a_0
2	a_1	0
3	a_0	0

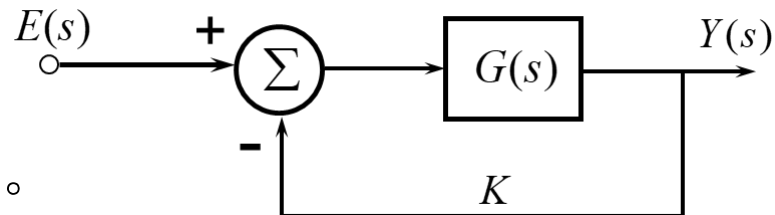
$$c_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

则二阶系统为稳定系统的条件为： $A(s)$ 的系数 $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$

例题36 图示系统，已知 $G(s) = \frac{s}{s^2 - 3s + 3}$ ， K 为常数。

1) 求使系统稳定的 K 值的取值范围；

2) 当 $K = 3$ 时，求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

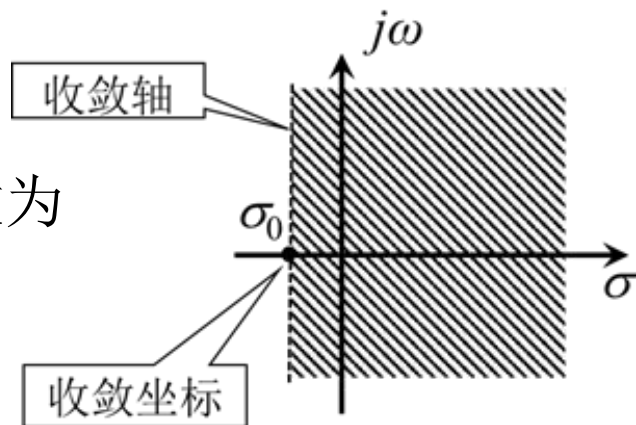


■ 系统函数与系统的频域特性

连续系统的频率响应函数

给定**因果稳定**系统，其频率响应函数为

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$



条件：系统函数**极点均位于 s 平面的左开半平面**，即在虚轴上收敛。

系统函数零、极点与频率响应特性

$$H(s) = \frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s-z_j)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)} \quad (H_0 > 0)$$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)} = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m B_j e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^n A_i e^{j\theta_i}}$$

$$\begin{cases} \text{零矢量: } j\omega - z_j = B_j e^{j\psi_j} \\ \text{极矢量: } j\omega - p_i = A_i e^{j\theta_i} \end{cases}$$

■ 系统函数与系统的频域特性

系统函数零、极点与频率响应特性

$$H(j\omega) = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m B_j e^{j\psi_j}}{\prod_{i=1}^n A_i e^{j\theta_i}} \begin{cases} \text{零矢量: } j\omega - z_j = B_j e^{j\psi_j} \\ \text{极矢量: } j\omega - p_i = A_i e^{j\theta_i} \end{cases}$$
$$= H_0 \frac{B_1 B_2 \cdots B_m e^{j(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m)}}{A_1 A_2 \cdots A_n e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

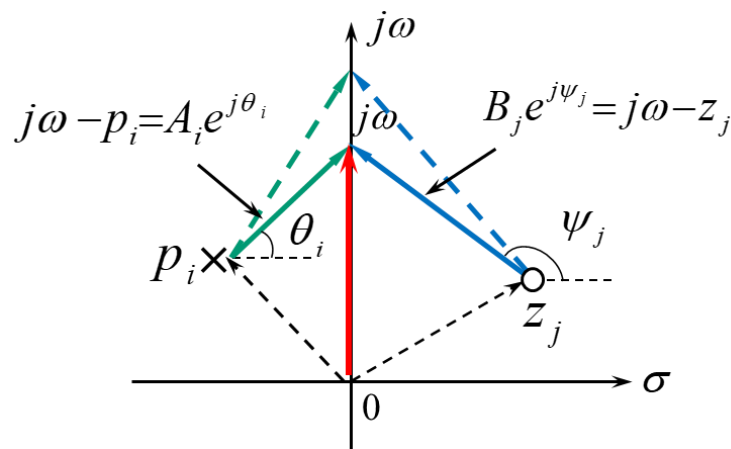
幅频响应特性

$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{B_1 B_2 \cdots B_m}{A_1 A_2 \cdots A_n} = H_0 \frac{\text{零矢量模值之积}}{\text{极矢量模值之积}}$$

相频响应特性

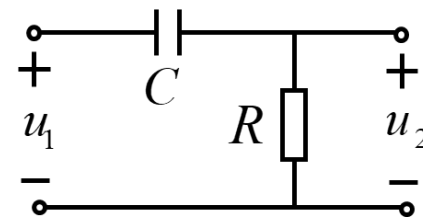
$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= (\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \\ &= \text{零矢量相角之和} - \text{极矢量相角之和} \end{aligned}$$

频率特性几何画法

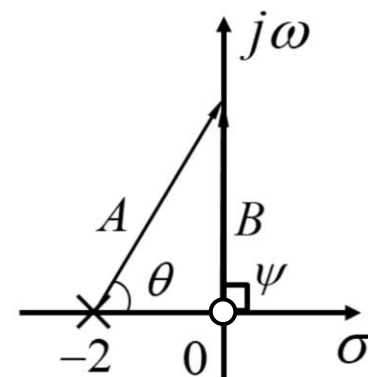


当 ω 沿虚轴移动时（即频率发生变化），各矢量的模和相位角都会随时变化，因此根据各矢量随着 ω 变化的情况，可画出幅频特性和相频特性曲线。

例题37 已知图示电路，其中 $R = 1\Omega$ ， $C = 0.5\text{F}$ 。



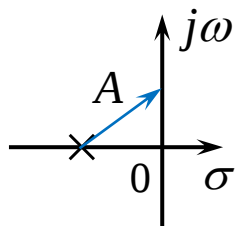
- 1) 求该系统的频率响应函数 $H(j\omega)$;
- 2) 粗略作出幅频、相频特性曲线，并判断系统特性;
- 3) 假设输入 $e(t) = 2 + 4\cos 2t + 10\cos 4t$ ，求系统稳态响应 $y_{ss}(t)$ 。



■ 系统函数与系统的频域特性

零极点分布与频率特性关系

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0 \quad (\alpha > 0)$$

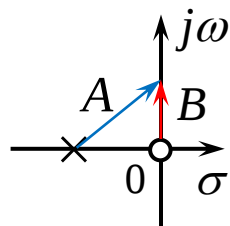


$$H(s) = \frac{K}{s + \alpha}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{A}$$

$$\begin{cases} |H(j0)| = \frac{K}{A} < \infty \\ |H(j\infty)| \rightarrow 0 \end{cases}$$

低通特性

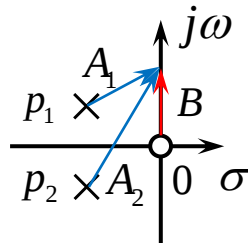


$$H(s) = \frac{Ks}{s + \alpha}$$

$$|H(j\omega)| = K \frac{B}{A}$$

$$\begin{cases} |H(j0)| = 0 \\ |H(j\infty)| \rightarrow K < \infty \end{cases}$$

高通特性

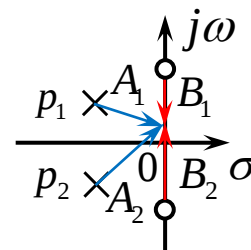


$$H(s) = \frac{Ks}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$|H(j\omega)| = K \frac{B}{A_1 A_2}$$

$$\begin{cases} |H(j0)| = 0 \\ |H(j\infty)| \rightarrow 0 \end{cases}$$

带通特性



$$H(s) = \frac{K(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$|H(j\omega)| = K \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2}$$

$$\begin{cases} |H(j0)| < \infty \\ |H(j\infty)| \rightarrow K < \infty \\ |H(j\omega_0)| = 0 \end{cases}$$

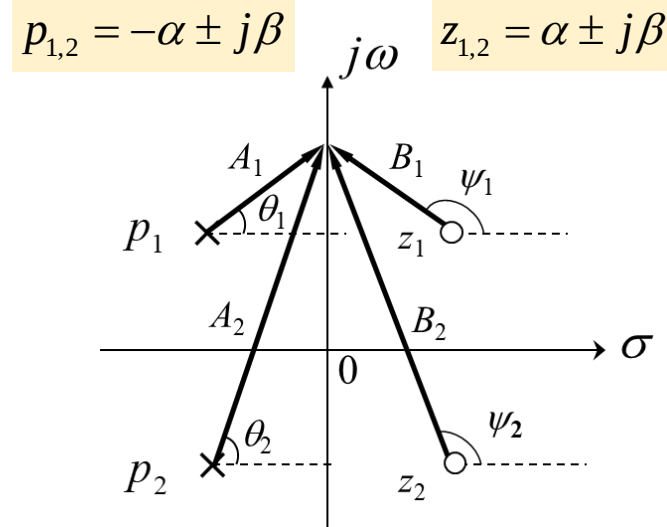
带阻特性

实际中系统零极点可以配置多个，此处只给出较为简单的形式。

■ 系统函数与系统的频域特性

全通系统

全通系统指系统函数极点位于 s 平面左半平面，零点位于 s 平面右半平面，而且零点与极点关于虚轴镜像对称的系统，其系统函数称为全通函数，幅频响应为一常数。

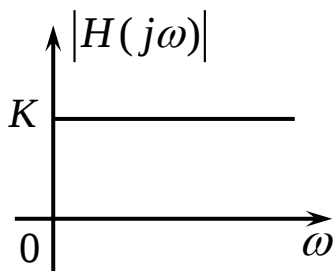


$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

$$z_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

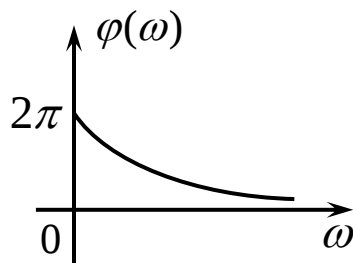
幅频响应特性

$$|H(j\omega)| = K \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2} = K$$



相频响应特性

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \psi_1 + \psi_2 - \theta_1 - \theta_2 \\ &= 2\pi - 2(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$



$$\begin{cases} A_1 = B_1, & A_2 = B_2 \\ \theta_1 + \psi_1 = \pi, & \theta_2 + \psi_2 = \pi \end{cases}$$

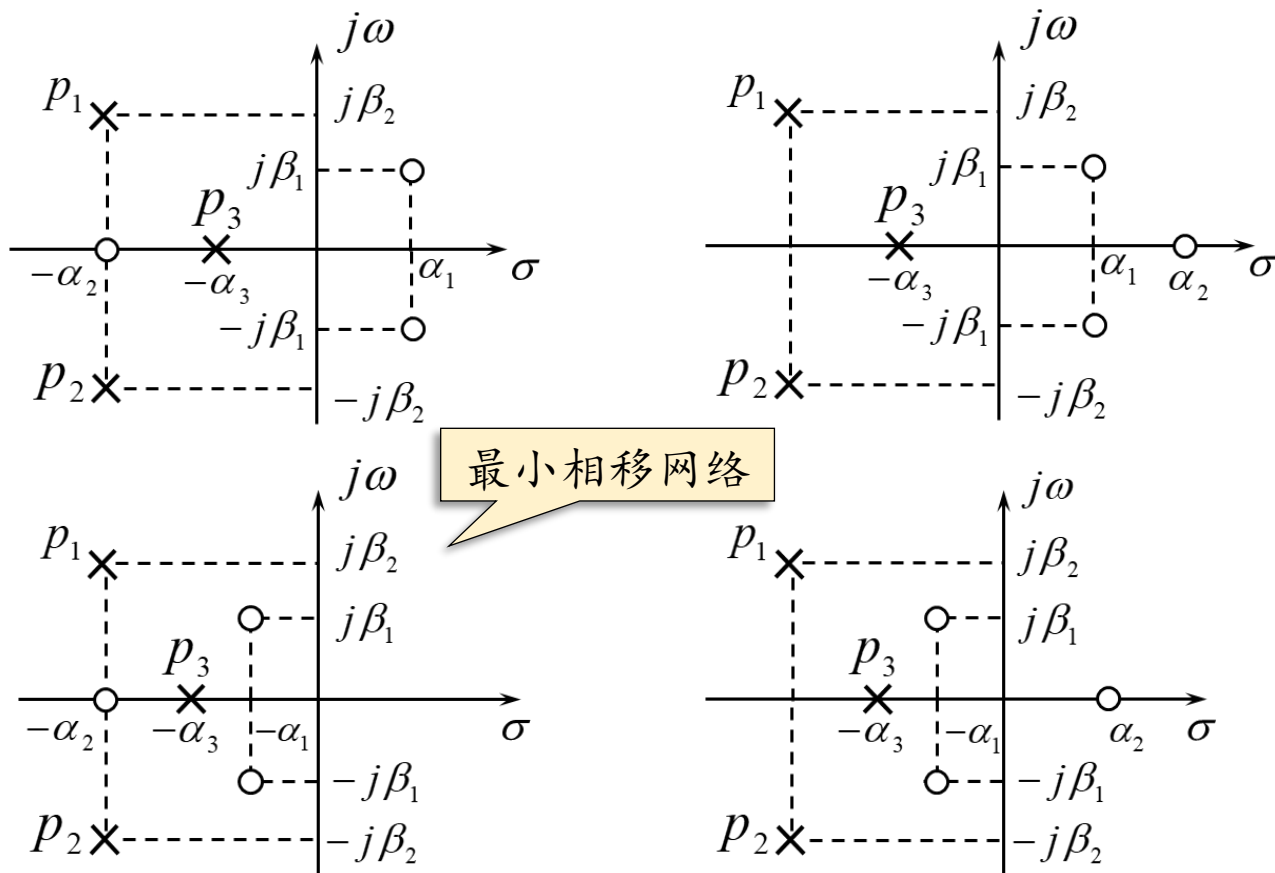
$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$H(j\omega) = K \frac{B_1 B_2}{A_1 A_2} e^{j(\psi_1 + \psi_2 - \theta_1 - \theta_2)}$$

■ 系统函数与系统的频域特性

最小相移系统

对于相同幅频特性的因果稳定系统，**所有零点均在左半平面**的系统称为最小相移系统，其相移函数 $\varphi(\omega)$ 最小，相应网络称为最小相移网络。



4.6 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

■ 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

引言

- 拉普拉斯变换是傅里叶变换的一种推广，信号的拉普拉斯变换存在时，其傅里叶变换不一定存在。
- 目标：根据信号的拉普拉斯变换求傅里叶变换，并分析需要满足的条件。
- 从实用角度考虑，仅讨论信号为因果信号时的情形，其拉普拉斯变换的收敛域为 $\text{Re}[s] > \sigma_0$ ，因此 $F(s)$ 与 $F(j\omega)$ 的关系与收敛边界 $\text{Re}[s] = \sigma_0$ 有关。

■ 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

$\sigma_0 > 0$ 此时收敛边界位于 s 平面的右半平面

此时虚轴 $s = j\omega$ 不在收敛域内，因此在 $s = j\omega$ 处 $F(s)$ 不收敛，故傅里叶变换不存在。

$$f(t) = e^{2t} \varepsilon(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s-2}, \operatorname{Re}[s] > 2, F(j\omega) \text{ 不存在}$$

$\sigma_0 < 0$ 此时收敛边界位于 s 平面的左半平面

此时虚轴 $s = j\omega$ 在收敛域内，因此在 $s = j\omega$ 处 $F(s)$ 收敛，故傅里叶变换存在，为： $F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$ ，即直接在象函数 $F(s)$ 中取虚轴。

$$f(t) = e^{-2t} \varepsilon(t) \leftrightarrow F(s) = \frac{1}{s+2}, \operatorname{Re}[s] > -2, F(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+2}$$

■ 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

$\sigma_0 = 0$ 此时收敛边界位于虚轴，即在虚轴上有极点

此时虚轴 $s = j\omega$ 不在收敛域内，因此在 $s = j\omega$ 处 $F(s)$ 不收敛，但是傅里叶变换存在，只是不能简单的取虚轴了，此时傅里叶变换将**包含冲激函数**。

➤ 当虚轴上仅有单极点时，有关系式：

$$F(j\omega) = F(s)\big|_{s=j\omega} + \pi \sum_{i=1}^n k_i \delta(\omega - \omega_i)$$

其中 ω_i 为 $F(s)$ 在虚轴上的极点， k_i 为 $F(s)$ 部分分式展开式中对应于这些极点的部分分式的系数。

➤ 当虚轴上有重极点时，傅里叶变换会出现冲激函数的各阶导数项，这里不再赘述。

例题38 求下列信号的傅里叶变换。

1) $f(t) = e^{-\alpha t} \cos \beta t \varepsilon(t), \alpha > 0$ 2) $f(t) = \varepsilon(t)$ 3) $f(t) = \cos \beta t \varepsilon(t)$

信号与系统

本章结束，谢谢

主讲人：张锦皓 Roger

课件制作：张锦皓 Roger